

Jay Boies

Archi

# stavebníky časopis

**3** ROČNÍK X • 1962

Archi

VYDAVATEĽSTVO SLOVENSKEJ AKADEMIE VIED

## OBSAH

Bareš R., Příspěvek k metodě výpočtu roštů podle Guyona-Massoneta . . . . .	129
Schalek D., Tlak pórovej vody v súdržných zeminách . . . . .	147
Kovařík V., Řešení šikmých ortotropních desek variační metodou postupných aproximací . . . . .	167
Mejzlík L., Klapetek F., Čermák Z., Statická štúdia klenbovej priehrady pre lokalitu na východnom Slovensku (Dokončenie) . . . . .	180
Predbežné zdelenie:	
Tichý M., Vorlíček M., Vliv předpjaté výztuže v tlačené oblasti průřezu na variabilitu únosnosti . . . . .	188
Zprávy:	
Havlíček J., Pátá mezinárodní konference Mezinárodní společnosti pro mechaniku zemin a zakládání staveb . . . . .	191
Zprávy o dokončených výskumných úlohách . . . . .	166, 179, 190, 192

---

## Stavebnícky časopis

Ústavu teoretickej a aplikovanej mechaniky Československej akadémie vied  
a Ústavu stavebníctva a architektúry Slovenskej akadémie vied

Ročník X, 1962, číslo 3

Vydáva Vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied

Redakčná rada:

Hlavný redaktor a predseda: člen korešpondent SAV Karol Havelka D. Sc.,  
Podpredseda: Dr. inž. Oldřich Valenta C. Sc. Členovia: Dr. inž. Jozef Brilla C.  
Sc., doc. inž. Jozef Djubek C. Sc., inž. Martin Halahyja C. Sc., inž. Bohumil Kou-  
novský C. Sc., inž. Rudolf Skrúcaný C. Sc., dr. inž. Juraj Stork, inž. Miroslav  
Škaloud C. Sc., inž. Milík Tichý C. Sc., doc. dr. inž. Karel Waitzmann D. Sc.

Výkonný redaktor: inž. Dušan Franců

Redakcia: Bratislava, ul. Obrancov mieru 41. Časopis vychádza desať ráz do roka. Ročné predplatné Kčs 80,—, jednotlivé číslo Kčs 8,—. Rozširuje Poštová novinová služba, objednávky a predplatné prijíma Poštový novinový úrad — ústredná administrácia PNS — Gottwaldovo námestie 48/VII, Bratislava. Možno tiež objednať na každom poštovom úrade, alebo u doručovateľa. Objednávky do zahraničia vybavuje Poštový novinový úrad — vývoz tlače — Jindřišská ul. 14, Praha 1. Vytlačil TISK, knižní výroba, n. p., závod Brno, provozovna 11

Výmer PIO č. 12 026/53-IV/2. K-22\*21043

INŽ. RICHARD BAREŠ, C. Sc.

Ústav teoretické a aplikované mechaniky ČSAV, Praha

PŘÍSPĚVEK K METODĚ VÝPOČTU ROŠTŮ  
PODLE GUYONA – MASSONNETA

## Úvod

Jedna z nevhodnějších metod pro výpočet roštů mostového typu, používající analogie ortotropní desky, je metoda Guyona—Massonnet. Používá tzv. roznášecích součinitelů zavedených Guyonem při výpočtu isotropních desek [2]. Postup výpočtu je rychlý, přehledný, snadno kontrolovatelný, příslušní součinitelé pro výpočet různých statických veličin se dají tabelovat, lze dosáhnout libovolné přesnosti a statici nemusí pracovat se složitým vyčíslováním hyperbolických a exponenciálních funkcí jako u jiných podobných metod.

Massonnetem byly pro některé hodnoty výchozích parametrů vypočteny a uveřejněny [5, 6] součinitelé pro určení průhybů, ohybových podélných a příčných momentů a kroutících momentů. Řada dalších autorů dále zpřesnila, rozšířila a, což je důležité, experimentálně ověřila na modelech i skutečných konstrukcích tuto prakticky výhodnou metodu. Při výpočtu roštů je však zapotřebí obvykle znát velikost i průběh posouvajících sil v obou směrech a reakcí. Autorem jsou dále odvozeny příslušné vztahy pro výpočet těchto veličin.

## Přibližné určení posouvajících sil

Součinitel příčního roznášení  $K_{(y)}$  je dán poměrem průhybů  $w_{(x,y)}$  nebo podélných ohybových momentů  $M_{(x,y)}$  od přímkového zatížení měnícího se ve směru  $X$  podle sinusovky k průměrným průhybům  $w_{0(x)}$  nebo průměrným podélným ohybovým momentům  $M_{0x(x)}$ , které by vznikly při roznesení tohoto zatížení rovnoměrně po celé šířce konstrukce. Je tedy

$$K_{(y)} = \frac{w_{(x,y)}}{w_{0(x)}} = \frac{M_{x(x,y)}}{M_{0x(x)}}. \quad (1)$$

Přibližně jsou též zatížení, přenesená příčníky na jednotlivé trámy konstrukce, úměrná průhybům  $w$ . Z toho plyne, že součinitel příčního roznášení  $K$  má také hodnotu

$$K_{(y)} = \frac{P_T}{P_{T0}} \quad (2)$$

a ukazuje, jak se vnější zatížení, ve směru  $X$  se měnící podle sinusovky, příčně roznáší mezi jednotlivé trámy. V předchozím vzorci je  $P_{T0}$  zatížení roznesené rovnoměrně po celé šířce mostu,  $P_T$  část zatížení, kterou přenáší jednotlivý trám.

U menších, nebo málo zatížených konstrukcí můžeme tedy přibližně určit posouvající sílu v jednotlivém trámu ze vztahu:

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = \frac{d(K_{(y)}M_{0x})}{dx} = K_{(y)} \frac{P_m}{2b} \frac{l}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{2}. \quad (3)$$

Označíme-li  $\frac{pm}{2b} \frac{l}{\pi m} \cos \frac{m\pi x}{l} = Q_{0x}$  průměrnou posouvající sílu pro most zatížený přímkovým, ve směru  $X$  sinusově rozděleným zatížením, obdržíme opět

$$\frac{Q_{x(z,y)}}{Q_{0x(z)}} = K_{(y)}. \quad (4)$$

V případě, že působí na konstrukci jiné zatížení než sinusové, značí  $P_m$  v rov. (3) amplitudu  $m$  členu rozvoje skutečného zatížení do Fourierovy řady.

Lze tedy i pro přibližné určení podélné posouvající síly v trámech užít již popsaného součinitele příčného roznášení, jehož hodnota je

$$K_{\alpha m} = \frac{2b\varrho_T \pi^4 m^4}{P_m l^4} \left[ A_m M_{\varphi m} + \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} N_{\varphi m} \right] + \left[ C_m O_{\varphi m} + \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} P_{\varphi m} \right] + \bar{C}_m \left( O_{(\varphi-\psi)m} + \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} P_{(\varphi-\psi)m} \right). \quad (5)$$

Zde značí:

$$\begin{aligned} M_{\varphi m} &= e^{m\varphi n'} \cos m\varphi t', & n' &= \vartheta \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}, \\ N_{\varphi m} &= e^{m\varphi n'} \sin m\varphi t', & t' &= \vartheta \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}, \\ O_{\varphi m} &= e^{-m\varphi n'} \cos m\varphi t', & \varphi &= \frac{\pi y}{b}, \\ P_{\varphi m} &= e^{-m\varphi n'} \sin m\varphi t', & \psi &= \frac{\pi e}{b}, \\ O_{|\varphi-\psi|m} &= e^{-m|\varphi-\psi|n'} \cos m|\varphi-\psi|t', \\ P_{|\varphi-\psi|m} &= e^{-m|\varphi-\psi|n'} \sin m|\varphi-\psi|t', \\ \bar{C}_m &= \frac{P_m b^3}{2\sqrt{2(1+\alpha)} \varrho_P \pi^3 \vartheta^3 m^3}. \end{aligned}$$

$A_m, B_m, C_m, D_m$  jsou integrační konstanty, které se určí z okrajových podmínek [5], parametr příčného ztužení

$$\vartheta = \frac{b}{l} \sqrt[4]{\frac{\varrho_T}{\varrho_P}},$$

parametr kroucení

$$\alpha = \frac{\gamma_T + \gamma_P}{2\sqrt{\varrho_T + \varrho_P}},$$

kde

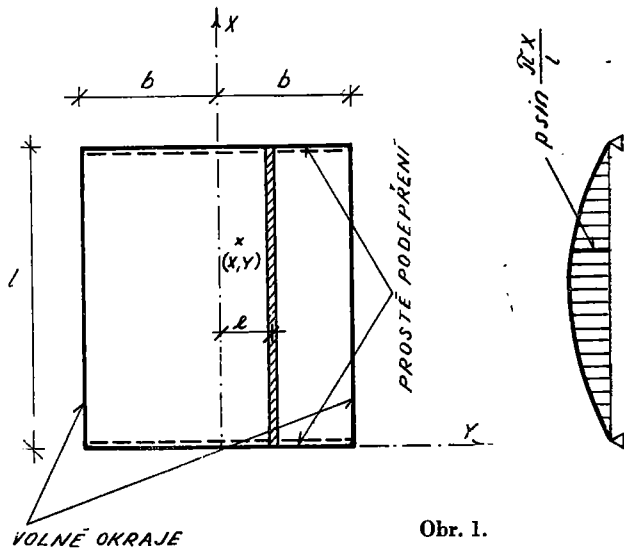
$b$  — polovina šířky konstrukce,

$l$  — rozpětí konstrukce,

$\varrho_T, \gamma_T, \varrho_P, \gamma_P$  — tuhost v ohybu (v kroucení) ve směru trámů (v příčnici) na jednotku délky (obr. 1).

Pro přímkové zatížení rozdělené ve směru  $X$  podle sinusovky bude  $m = 1$ .  
Podobně jako v podélném směru lze i v příčných určit v menších nebo málo zatížených konstrukcích posouvající síly ze vztahu

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} = \kappa_{\alpha m} P_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (7)$$



Obr. 1.

kde součinitel  $\kappa_{\alpha m}$  má hodnotu

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha m} = & -\frac{m^3 \pi^3 Q_P}{b^3 P_m} \left[ (2\alpha - 1) \sqrt{\frac{1 + \alpha}{2}} \left( A_m M_{\varphi m} + \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1 - \alpha}{2}}} N_{\varphi m} \right) + \right. \\ & + (2\alpha + 1) \sqrt{\frac{1 - \alpha}{2}} \left( -A_m N_{\varphi m} + \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1 - \alpha}{2}}} M_{\varphi m} \right) - \\ & - (2\alpha - 1) \sqrt{\frac{1 + \alpha}{2}} \left( C_m O_{\varphi m} + \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1 - \alpha}{2}}} P_{\varphi m} \right) + \\ & + (2\alpha + 1) \sqrt{\frac{1 - \alpha}{2}} \left( -C_m P_{\varphi m} + \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1 - \alpha}{2}}} O_{\varphi m} \right) \pm \\ & \left. \pm \frac{\bar{C}_m}{\sqrt{\frac{1 - \alpha}{2}}} \left( -\alpha P_{|\varphi - \psi| m} + \sqrt{1 - \alpha^2} O_{|\varphi - \psi| m} \right) \right]. \quad (8) \end{aligned}$$

### Přesně určené posouvající síly

Přesné určené posouvající síly však vyžaduje, s ohledem na vliv kroutících momentů, rozlišení mezi roštem a skutečnou ortotropní deskou (realisovanou např. deskovým mostem nebo mostem z prefabrikovaných dílů příčně předpjatých).

#### a) Posouvající síly v podélném směru v desce

Posouvající síly ve směru  $X$  na jednotku šířky je dána výrazem

$$Q_x = -\varrho_T \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 2\gamma \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( M_x + \frac{2\gamma}{\varrho_P} M_y \right). \quad (9)$$

Zavedeme-li  $2\gamma = \alpha \sqrt{\varrho_T \varrho_P}$ , obdržíme po úpravě

$$Q_x = p_m \varepsilon_{\alpha m} \frac{l}{b} \cos \frac{m\pi x}{l}, \quad (10)$$

kde

$$\varepsilon_{\alpha m} = \frac{m^3 \varrho_T \pi^3 b}{l^4 P_m} \left[ (1 - \alpha^2) \left( A_m M_{\varphi m} + \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} N_{\varphi m} \right) + \right. \\ \left. + \alpha \sqrt{1 - \alpha^2} \left( A_m N_{\varphi m} - \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} M_{\varphi m} \right) + \right. \\ \left. + (1 - \alpha^2) \left( C_m O_{\varphi m} + \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} P_{\varphi m} \right) + \right. \\ \left. + \alpha \sqrt{1 - \alpha^2} \left( -C_m P_{\varphi m} + \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} O_{\varphi m} \right) + \right. \\ \left. + \bar{C}_m (1 + \alpha) \left( O_{|\varphi-\psi|m} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} P_{|\varphi-\psi|m} \right) \right]. \quad (11)$$

Použité symboly  $M$ ,  $N$ ,  $O$ ,  $P$ ,  $\bar{C}$  mají tentýž význam jako dříve.

Pro desku netuhou v kroucení, tj. pro  $\alpha = 0$ , lze použít výhodné analogie, která předpokládá, že příčník diferenciální šířky je možno uvažovat jako trám na pružném podkladě [3, 4]. Sílu  $Q_x$  v tomto případě můžeme opět vyjádřit rovnicí

$$Q_x = p_m \varepsilon_{0m} \frac{l}{b} \cos \frac{m\pi x}{l}, \quad (10a)$$

příčemž  $\varepsilon_{01}$  je dáno výrazem

$$\varepsilon_{01} = \frac{\vartheta}{\sqrt{2}} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 2\lambda b - \sin^2 2\lambda b} \left\{ \begin{aligned} & 2 \operatorname{ch} \lambda(b \pm y) \cos \lambda(b \pm y) [\operatorname{sh} 2\lambda b \cos \lambda \cdot \\ & \cdot (b \pm e) \operatorname{ch} \lambda(b \mp e) - \sin 2\lambda b \operatorname{ch} \lambda(b \pm e) \cos \lambda(b \mp e)] + \\ & + [\operatorname{ch} \lambda(b \pm y) \sin \lambda(b \mp y) + \operatorname{sh} \lambda(b \pm y) \cos \lambda(b \pm y)] \cdot \\ & \cdot \{ \operatorname{sh} 2\lambda b [\sin \lambda(b \pm e) \operatorname{ch} \lambda(b \mp e) - \cos \lambda(b \pm e) \operatorname{sh} \lambda(b \mp e)] + \\ & + \sin 2\lambda b [\operatorname{sh} \lambda(b \pm e) \cos \lambda(b \pm e) - \operatorname{ch} \lambda(b \pm e) \sin \lambda(b \pm e)] \} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Zde je

$$\lambda = \frac{\pi \vartheta}{b \sqrt{2}}. \quad (13)$$

Horní znaménka v oblých závorkách platí pro  $e > y$ , spodní znaménko pro  $e < y$ .  $\varepsilon_{0m}$  se obdrží z rov. (12) dosazením  $m\vartheta$  za  $\vartheta$  a  $m\lambda$  za  $\lambda$ .

Pro výpočet součinitele  $\varepsilon_1$  pro případ, kdy  $\alpha = 1$ , můžeme vyjít ze vztahů odvozených Guyonem [2] pro isotropní desku. Vyjádříme-li opět posouvající sílu tvarem

$$Q_x = P_m \varepsilon_{1m} \frac{l}{b} \cos \frac{m\pi x}{l}, \quad (10b)$$

potom hodnota součinitele  $\varepsilon_{11}$  je:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\vartheta}{4 \operatorname{sh}^2 \sigma} [2 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \chi + (2 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \varphi) U\psi + (2 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \varphi) V\psi], \quad (14)$$

kde

$$\left. \begin{aligned} U\psi &= \frac{[(\sigma \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma) \operatorname{ch} \vartheta \psi - \vartheta \psi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \psi]}{3 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma - \sigma}, \\ V\psi &= \frac{[(2 \operatorname{sh} \sigma + \sigma \operatorname{ch} \sigma) \operatorname{sh} \vartheta \psi - \vartheta \psi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \psi]}{3 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma + \sigma}, \\ \sigma &= \vartheta \pi, \\ \chi &= \pi - |\varphi - \psi|. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$\varepsilon_{1m}$  se obdrží z rov. (14) dosazením  $m\vartheta$  za  $\vartheta$  a  $m\sigma$  za  $\sigma$ .

Pro různé hodnoty  $\alpha$  a  $\vartheta = 0,66874$  byly vypočteny hodnoty součinitelů  $\varepsilon_\alpha$  podle rov. (11); jsou uvedeny v tab. 1.

Rozborem změny těchto součinitelů v závislosti na  $\alpha$  byly odvozeny dva interpolační vzorce k určení obecného  $\varepsilon_{\alpha m}$  pomocí  $\varepsilon_{0m}$  a  $\varepsilon_{1m}$  v závislosti na poloze břemene a průřezu, v němž je účinek hledán.

Tabulka 1\*

$\vartheta = 0,668\ 74; \alpha = 0$									
$y \backslash e$	$-b$	$-3/4b$	$-1/2b$	$-1/4b$	$0$	$1/4b$	$1/2b$	$3/4b$	$b$
$0$	0,019	0,095	0,168	0,229	0,257	0,229	0,168	0,095	0,019
$1/4b$	-0,048	0,024	0,096	0,167	0,229	0,262	0,243	0,195	0,139
$1/2b$	-0,082	-0,028	0,031	0,096	0,168	0,243	0,304	0,328	0,336
$3/4b$	-0,101	-0,068	-0,028	0,024	0,095	0,195	0,328	0,478	0,616
$b$	-0,110	-0,101	-0,082	-0,047	0,019	0,139	0,336	0,616	0,952
$\vartheta = 0,668\ 74; \alpha = 0,125$									
$y \backslash e$	$-b$	$-3/4b$	$-1/2b$	$-1/4b$	$0$	$1/4b$	$1/2b$	$3/4b$	$b$
$0$	0,030	0,096	0,162	0,226	0,268	0,226	0,162	0,096	0,030
$1/4b$	-0,023	0,034	0,095	0,161	0,227	0,274	0,239	0,184	0,127
$1/2b$	-0,051	-0,007	0,041	0,098	0,167	0,243	0,310	0,303	0,284
$3/4b$	-0,067	-0,038	-0,004	0,042	0,106	0,197	0,313	0,440	0,513
$b$	-0,081	-0,065	-0,045	-0,010	0,050	0,154	0,314	0,536	0,807
$\vartheta = 0,668\ 74; \alpha = 0,250$									
$y \backslash e$	$-b$	$-3/4b$	$-1/2b$	$-1/4b$	$0$	$1/4b$	$1/2b$	$3/4b$	$b$
$0$	0,038	0,095	0,158	0,223	0,280	0,223	0,158	0,095	0,038
$1/4b$	-0,006	0,041	0,094	0,156	0,225	0,286	0,236	0,176	0,118
$1/2b$	-0,029	0,007	0,047	0,099	0,165	0,242	0,319	0,287	0,248
$3/4b$	-0,042	-0,018	0,012	0,053	0,112	0,196	0,303	0,422	0,444
$b$	-0,055	-0,039	-0,018	0,015	0,070	0,160	0,296	0,482	0,708
$\vartheta = 0,668\ 74; \alpha = 0,375$									
$y \backslash e$	$-b$	$-3/4b$	$-1/2b$	$-1/4b$	$0$	$1/4b$	$1/2b$	$3/4b$	$b$
$0$	0,044	0,095	0,153	0,222	0,293	0,222	0,153	0,095	0,044
$1/4b$	0,007	0,046	0,094	0,152	0,224	0,299	0,233	0,169	0,111
$1/2b$	-0,012	-0,016	0,051	0,098	0,162	0,241	0,328	0,275	0,222
$3/4b$	-0,024	-0,003	0,023	0,060	0,115	0,193	0,295	0,412	0,394
$b$	-0,033	-0,018	0,002	0,033	0,082	0,163	0,282	0,442	0,635

\* Hodnoty součinitelů, podle kterých byly stanoveny interpolační vzorce, byly vypočteny na 5 desetinných míst; pro úsporu místa jsou zde uvedena (po zaokrouhlení) pouze první tři desetinná místa.



$\vartheta = 0,668\ 74; \alpha = 0,500$									
$y \backslash e$	$-b$	$-3/4b$	$-1/2b$	$-1/4b$	$0$	$1/4b$	$1/2b$	$3/4b$	$b$
$0$	0,048	0,094	0,149	0,221	0,305	0,221	0,149	0,094	0,048
$1/4b$	0,016	0,050	0,092	0,148	0,223	0,312	0,232	0,164	0,106
$1/2b$	0,000	0,024	0,054	0,097	0,159	0,240	0,338	0,267	0,203
$3/4b$	-0,009	0,009	0,032	0,066	0,116	0,191	0,289	0,407	0,356
$b$	-0,016	-0,001	0,018	0,047	0,094	0,165	0,270	0,411	0,580
$\vartheta = 0,668\ 74; \alpha = 0,625$									
$y \backslash e$	$-b$	$-3/4b$	$-1/2b$	$-1/4b$	$0$	$1/4b$	$1/2b$	$3/4b$	$b$
$0$	0,051	0,093	0,146	0,220	0,317	0,220	0,146	0,093	0,051
$1/4b$	0,023	0,052	0,090	0,145	0,222	0,324	0,230	0,159	0,102
$1/2b$	0,009	0,030	0,057	0,096	0,155	0,239	0,348	0,260	0,187
$3/4b$	0,003	0,018	0,039	0,069	0,117	0,186	0,283	0,406	0,326
$b$	-0,000	0,013	0,031	0,059	0,101	0,167	0,261	0,386	0,536
$\vartheta = 0,668\ 74; \alpha = 0,750$									
$y \backslash e$	$-b$	$-3/4b$	$-1/2b$	$-1/4b$	$0$	$1/4b$	$1/2b$	$3/4b$	$b$
$0$	0,054	0,092	0,143	0,218	0,329	0,218	0,143	0,092	0,054
$1/4b$	0,029	0,054	0,089	0,141	0,220	0,336	0,229	0,154	0,099
$3/4b$	0,017	0,034	0,058	0,095	0,152	0,237	0,359	0,255	0,175
$3/4b$	0,013	0,026	0,044	0,072	0,117	0,183	0,279	0,408	0,301
$b$	0,012	0,025	0,041	0,067	0,108	0,168	0,253	0,366	0,501
$\vartheta = 0,668\ 74; \alpha = 0,875$									
$y \backslash e$	$-b$	$-3/4b$	$-1/2b$	$-1/4b$	$0$	$1/4b$	$1/2b$	$3/4b$	$b$
$0$	0,056	0,091	0,140	0,217	0,341	0,217	0,140	0,091	0,056
$1/4b$	0,034	0,056	0,088	0,139	0,220	0,348	0,227	0,151	0,096
$1/2b$	0,023	0,038	0,060	0,094	0,149	0,236	0,369	0,251	0,166
$3/4b$	0,020	0,032	0,048	0,075	0,116	0,180	0,274	0,412	0,282
$b$	0,023	0,034	0,051	0,075	0,113	0,168	0,245	0,349	0,472
$\vartheta = 668\ 74; \alpha = 1,000$									
$y \backslash e$	$-b$	$-3/4b$	$-1/2b$	$-1/4b$	$0$	$1/4b$	$1/2b$	$3/4b$	$b$
$0$	0,058	0,090	0,137	0,217	0,353	0,217	0,137	0,090	0,058
$1/4b$	0,038	0,057	0,087	0,135	0,219	0,359	0,226	0,148	0,094
$1/2b$	0,028	0,041	0,061	0,093	0,146	0,235	0,379	0,247	0,157
$3/4b$	0,026	0,037	0,052	0,076	0,115	0,177	0,271	0,416	0,265
$b$	0,032	0,043	0,058	0,081	0,117	0,168	0,240	0,335	0,447

Platí, že

$$\left. \begin{array}{l} \text{pro} \quad |y| + |e| \leq \frac{3}{4} b \quad \text{je} \quad \varepsilon_{\alpha m} = \varepsilon_{0m} + (\varepsilon_{1m} - \varepsilon_{0m}) \alpha \\ \text{a pro} \quad |y| + |e| > \frac{3}{4} b \quad \text{je} \quad \varepsilon_{\alpha m} = \varepsilon_{0m} + (\varepsilon_{1m} - \varepsilon_{0m}) \sqrt{\alpha}. \end{array} \right\} (16)$$

### b) Posouvající síly v podélnících v roštu

Posouvající síla ve směru  $X$  na jednotku šířky je dána výrazem

$$Q_x = -Q_T \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \gamma_P \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( M_x + \frac{\gamma_P}{Q_P} M_y \right). \quad (17)$$

Po dosazení  $M_x$  a  $M_y$  obdržíme po úpravě

$$Q_x = P_m \cos \frac{m\pi x}{l} \left( \frac{l}{2b\pi m} K_{\alpha m} + \frac{\gamma_P}{Q_P} \frac{m\pi b}{l} \mu_{\alpha m} \right), \quad (18)$$

kde součinitel  $K_{\alpha m}$  je dán rov. (5);  $\mu_{\alpha m}$  je součinitel používaný k výpočtu příčných ohybových momentů [5, 6] a má tvar:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{\alpha m} = & -\frac{Q_P \partial^2 \pi^2 m^2}{P_m b^3} \left\{ x \left( A_m M_{\varphi m} + \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} N_{\varphi m} \right) + \right. \\ & + \sqrt{1-\alpha^2} \left( -A_m N_{\varphi m} + \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} M_{\varphi m} \right) + \\ & + \alpha \left( C_m O_{\varphi m} + \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} P_{\varphi m} \right) + \\ & + \sqrt{1-\alpha^2} \left( C_m P_{\varphi m} - \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} O_{\varphi m} \right) + \\ & \left. + \bar{C}_m \left[ \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} P_{|\varphi-\nu|m} - O_{|\varphi-\nu|m} \right] \right\}. \end{aligned} \right\} (19)$$

Symbole  $M$ ,  $N$ ,  $O$ ,  $P$  a  $\bar{C}$  mají opět stejný význam jako dříve.

Je-li  $\alpha = 0$ , je posouvající síla dána stejným výrazem jako v předchozím případě vzhledem k tomu, že kroutící momenty jsou nulové.

Hodnoty součinitelů  $K_{01}$  a  $\mu_{01}$  jsou dány (použije-li se opět výhodné analogie,

podle které se pokládá příčník diferenciální šířky za trám na pružném podkladě [3, 4]),  
výrazy:

$$K_{01} = 2\lambda b \frac{1}{\operatorname{sh}^2 2\lambda b - \sin^2 2\lambda b} \left\{ [2 \operatorname{ch} \lambda(b \pm y) \cos \lambda(b \pm y)] S_e + \right. \\ \left. + [\operatorname{ch} \lambda(b \pm y) \sin \lambda(b \pm y) + \operatorname{sh} \lambda(b \pm y) \cos \lambda(b \pm y)] T_e \right\}; \quad (20)$$

$$\mu_{01} = \frac{1}{\pi \vartheta \sqrt{2}} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 2\lambda b - \sin^2 2\lambda b} \left\{ [2 \operatorname{sh} \lambda(b \pm y) \sin \lambda(b \pm y)] S_e + \right. \\ \left. + [\operatorname{ch} \lambda(b \pm y) \sin \lambda(b \pm y) - \operatorname{sh} \lambda(b \pm y) \cos \lambda(b \pm y)] T_e \right\}, \quad (21)$$

kde

$$S_e = [\operatorname{sh} 2\lambda b \cos \lambda(b \pm e) \operatorname{ch} \lambda(b \mp e) - \sin 2\lambda b \operatorname{ch} \lambda(b \pm e) \cos \lambda(b \mp e)], \\ T_e = \{\operatorname{sh} 2\lambda b [\sin \lambda(b \pm e) \operatorname{ch} \lambda(b \mp e) - \cos \lambda(b \pm e) \operatorname{sh} \lambda(b \mp e) + \\ + \sin 2\lambda b [\operatorname{sh} \lambda(b \pm e) \cos \lambda(b \mp e) - \operatorname{ch} \lambda(b \pm e) \sin \lambda(b \mp e)]\} \quad (22)$$

a

$$\lambda = \frac{\pi \vartheta}{b \sqrt{2}}.$$

Horní znaménka v oblých závorkách platí pro  $e > y$ , spodní znaménka pro  $e < y$ .  
 $K_{0m}$  a  $\mu_{0m}$  se obdrží z rov. (20) a (21) osazením  $m\vartheta$  za  $\vartheta$ . Pro  $\alpha = 1$  vychází hodnoty  
součinitelů  $K_{11}$  a  $\mu_{11}$  použitím Guyonových výsledků pro isotropaní desky ve tvaru:

$$K_{11} = \frac{\sigma}{2 \operatorname{sh}^2 \sigma} \left\{ (\sigma \operatorname{ch} \sigma + \operatorname{sh} \sigma) \operatorname{ch} \vartheta \chi - \vartheta \chi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \chi + \right. \\ \left. + [(\sigma \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma) \operatorname{ch} \vartheta \varphi - \vartheta \varphi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \varphi] U_\varphi + \right. \\ \left. + [(2 \operatorname{sh} \sigma + \sigma \operatorname{ch} \sigma) \operatorname{sh} \vartheta \varphi - \vartheta \varphi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \varphi] V_\varphi \right\}; \quad (23)$$

$$\mu_{11} = -\frac{1}{4\sigma \operatorname{sh}^2 \sigma} \left\{ (\sigma \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma) \operatorname{ch} \vartheta \chi - \vartheta \chi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \chi + \right. \\ \left. + [(\sigma \operatorname{ch} \sigma - 3 \operatorname{sh} \sigma) \operatorname{ch} \vartheta \varphi - \vartheta \varphi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \varphi] U_\varphi + \right. \\ \left. + [\sigma \operatorname{ch} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \varphi - \vartheta \varphi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \varphi] V_\varphi \right\}. \quad (24)$$

Symbols  $U_\varphi$ ,  $V_\varphi$ ,  $\sigma$ ,  $\chi$  jsou dány vztahy (15).

$K_{1m}$  a  $\mu_{1m}$  se obdrží z rov. (23) a (24) dosazením  $m\vartheta$  za  $\vartheta$ . K určení posouvající síly  $Q_x$   
pro obecné  $\alpha$  vypočtou se součinitelé  $K_{\alpha m}$  a  $\mu_{\alpha m}$  pomocí  $K_{0m}$ ,  $\mu_{0m}$  a  $K_{1m}$ ,  $\mu_m$  podle  
interpoláčnických zorců.

$$K_{\alpha m} = K_{0m} + (K_{1m} - K_{0m}) \sqrt{\alpha}, \\ \mu_{\alpha m} = \mu_{0m} + (\mu_{1m} - \mu_{0m}) \sqrt{\alpha}. \quad (25)$$

Pro určení maximálních hodnot podélných posouvajících sil je nutno stanovit  
nejúčinnější postavení zatížení v příčném směru podle příčinkových čar  $\varepsilon$  (po případě  $K$   
a  $\mu$  u roštů) a v podélném směru obvyklým způsobem podle pravidel stavební me-  
chaniky pomocí příčinkových čar prostého nosníku.

c) Posouvající síly v příčném směru v desce

Posouvající síla ve směru  $Y$  na jednotku délky je dána výrazem

$$Q_y = -\varrho_P \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - 2\gamma \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \quad (26)$$

Zavedeme-li jako v předchozím případě  $2\gamma = \alpha \sqrt{\varrho_P \varrho_P}$ , obdržíme po provedení příslušných derivací a po úpravě výraz pro posouvající sílu v příčném směru ve tvaru vhodném pro praktické použití

$$Q_y = \nu_{am} P_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (27)$$

kde

$$\nu_{am} = \frac{m^3 \pi^3 \varrho_P^3}{b^3 P_m} \left[ (1 - \alpha) \sqrt{\frac{1 + \alpha}{2}} \left( A_m M_{\varphi m} + \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1 - \alpha}{2}}} N_{\varphi m} \right) - \right. \\ \left. - (1 + \alpha) \sqrt{\frac{1 - \alpha}{2}} \left( -A_m N_{\varphi m} + \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1 - \alpha}{2}}} M_{\varphi m} \right) - \right. \\ \left. - (1 - \alpha) \sqrt{\frac{1 + \alpha}{2}} \left( C_m O_{\varphi m} + \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1 - \alpha}{2}}} P_{\varphi m} \right) - \right. \\ \left. - (1 + \alpha) \sqrt{\frac{1 - \alpha}{2}} \left( -C_m P_{\varphi m} + \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1 - \alpha}{2}}} O_{\varphi m} \right) \pm \sqrt{2(1 + \alpha)} \bar{C}_m O_{|\varphi - \psi| m} \right]. \quad (28)$$

Symbole  $M$ ,  $N$ ,  $O$ ,  $P$ ,  $\bar{C}$  mají opět hodnoty dané výrazy (6); kladné znaménko posledního členu této rovnice odpovídá případu, kdy  $\psi > \varphi$ , záporné znaménko případu, kdy  $\psi < \varphi$ .

Jestliže  $\alpha = 0$ , můžeme vyjádřit posouvající sílu  $Q_y$  rovnicí

$$Q_y = \nu_{0m} P_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (27a)$$

kde součinitel  $\nu_{01}$  je dán výrazem

$$\nu_{01} = \frac{1}{\text{sh}^2 2\lambda b - \sin^2 2\lambda b} \left\{ \pm [\text{ch } \lambda(b \pm y) \sin \lambda(b \pm y) + \right. \\ \left. + \text{sh } \lambda(b \pm y) \cos \lambda(b \pm y)] S_e \pm [\text{sh } \lambda(b \pm y) \sin \lambda(b \pm y)] T_e \right\}. \quad (29)$$

Symbole  $S_e$ ,  $T_e$  a  $\lambda$  jsou dány rov. (22).

Horní znaménka odpovídají případu, kde  $e > y$ , spodní znaménka případu, kdy  $e < y$ . Hodnota  $\nu_{0m}$  se obdrží z rov. (29) dosazením  $m\vartheta$  za  $\vartheta$ . Pro výpočet sou-

činitele  $\nu_{11}$ , v případě, kdy  $\alpha = 1$ , použijeme rov. (23) a (24); po provedení příslušných derivací obdržíme po úpravě

$$\nu_{11} = \frac{1}{4 \operatorname{sh}^2 \sigma} \{ \mp 2 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \chi + 2 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \varphi U_\varphi + 2 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \varphi V_\varphi \}; \quad (30)$$

posouvající sílu jsme vyjádřili tvarem (27a) se záměnou indexů  $O$  za luv. Význam součinitelů  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma$ ,  $\chi$ ,  $U_\varphi$ ,  $V_\varphi$  je dán dříve. Kladné znaménko prvního členu rov. (30) odpovídá případu, kdy  $\psi > \varphi$ , záporné znaménko případu, kdy  $\psi < \varphi$ .

Hodnota  $\nu_{1m}$  se obdrží z rov. (30) dosazením  $m\vartheta$  za  $\vartheta$ .

Pro různé hodnoty  $\alpha$  a  $\vartheta = 0,66874$  byly vypočteny hodnoty součinitelů  $\nu_\alpha$  podle rov. (28); jsou uvedeny v tab. 2.

Rozeborem změny těchto součinitelů pro různé  $\alpha$  bylo prokázáno, že lze opět použít v celém rozsahu interpolačního vzorce k určení obecného  $\nu_{\alpha m}$  pomocí  $\nu_{0m}$  a  $\nu_{1m}$  ve tvaru

$$\nu_{\alpha m} = \nu_{0m} + (\nu_{1m} - \nu_{0m}) \sqrt{\alpha}. \quad (31)$$

#### d) Posouvající síly v příčnicích v roštu

Posouvající síla ve směru  $Y$  na jednotku šířky je dána výrazem

$$Q_y = -\varrho_P \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \gamma_T \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \quad (32)$$

Vyjádříme-li posouvající sílu obvyklým tvarem, obdržíme při použití součinitelů  $\kappa_\alpha$  dříve zavedeného [rov. (8)] a součinitelů  $\tau_\alpha$ , který se používá pro výpočet kroutících momentů [5, 6]

$$Q_y = P_m \sin \frac{m\pi x}{2} \left[ \kappa_{\alpha m} + \frac{m\pi b}{l} \frac{2\gamma_T}{\gamma_T + \gamma_P} \tau_{\alpha m} \right]. \quad (33)$$

Součinitel  $\tau_{\alpha m}$  má hodnotu

$$\tau_{\alpha m} = \alpha \sqrt{\varrho_T \varrho_P} \frac{m^2 \pi^2 \vartheta}{b^2 l p_m} \left[ \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \left( A_m M_{\varphi m} + \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} N_{\varphi m} \right) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \left( -A_m N_{\varphi m} + \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} M_{\varphi m} \right) - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \left( C_m O_{\varphi m} + \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} P_{\varphi m} \right) + \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} (-C_m P_{\varphi m}) + \right. \\ \left. + \left( \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} O_{\varphi m} \right) \mp \bar{C}_m \frac{P_{|\varphi-\psi|m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \right], \quad (34)$$

kde symboly  $M$ ,  $N$ ,  $O$ ,  $P$ ,  $\bar{C}$  mají stejné hodnoty jako dříve.

Tabulka 2\*

$\vartheta = 0,668\ 74; \alpha = 0$									
$y \backslash e$	$-b$	$-3/4b$	$-1/2b$	$-1/4b$	0	$1/4b$	$1/2b$	$3/4b$	$b$
0	0,223	0,060	-0,105	-0,296	$\mp 0,500$	0,296	0,105	-0,060	-0,223
$1/4b$	0,209	0,105	-0,005	-0,139	-0,306	-0,508 0,492	0,263	0,051	-0,165
$1/2b$	0,155	0,102	0,042	-0,036	-0,148	-0,307	-0,525 0,475	0,256	0,018
$3/4b$	0,083	0,065	0,042	0,010	-0,045	-0,133	-0,280	-0,429 0,571	0,387
$b$	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$\vartheta = 0,668\ 74; \alpha = 0,125$									
$y \backslash e$	$-b$	$-3/4b$	$-1/2b$	$-1/4b$	0	$1/4b$	$1/2b$	$3/4b$	$b$
0	0,139	0,010	-0,132	-0,301	$\mp 0,500$	0,301	0,132	0,010	-0,139
$1/4b$	0,140	0,059	-0,032	-0,148	-0,303	-0,501 0,499	0,289	0,098	-0,081
$1/2b$	0,110	0,069	0,020	-0,047	-0,148	-0,295	-0,494 0,506	0,287	0,076
$3/4b$	0,063	0,051	0,034	0,007	-0,041	-0,122	-0,248	-0,421 0,579	0,384
$b$	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$\vartheta = 0,668\ 74; \alpha = 0,250$									
$y \backslash e$	$-b$	$-3/4b$	$-1/2b$	$-1/4b$	0	$1/4b$	$1/2b$	$3/4b$	$b$
0	0,081	-0,026	-0,148	-0,304	$\mp 0,500$	0,304	0,148	0,026	-0,081
$1/4b$	0,092	0,026	-0,051	-0,154	-0,300	-0,495 0,505	0,302	0,130	-0,022
$1/2b$	0,077	0,044	0,004	-0,055	-0,147	-0,286	-0,480 0,520	0,310	0,118
$3/4b$	0,049	0,039	0,026	0,003	-0,039	-0,114	-0,235	-0,413 0,587	0,385
$b$	0	0	0	0	0	0	0	0	1

\* Hodnoty součinitelů, podle kterých byly stanoveny interpolační vzorce, byly vypočteny na 5 desetinných míst; pro úsporu místa jsou zde uvedena (po zaokrouhlení) pouze prvá tři desetinná místa.

$\vartheta = 0,668\ 74; \alpha = 0,375$									
$y \backslash e$	$-b$	$-3/4b$	$-1/2b$	$-1/4b$	0	$1/4b$	$1/2b$	$3/4b$	$b$
0	0,037	-0,052	-0,160	-0,305	$\mp 0,500$	0,305	0,160	0,052	-0,037
$1/4b$	0,055	0,002	-0,065	-0,159	-0,297	-0,490 0,510	0,311	0,154	0,021
$1/2b$	0,052	0,025	-0,009	-0,062	-0,146	-0,278	-0,469 0,531	0,326	0,148
$3/4b$	0,038	0,030	0,020	-0,000	-0,039	-0,108	-0,225	-0,406 0,594	0,386
$b$	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$\vartheta = 0,668\ 74; \alpha = 0,500$									
$y \backslash e$	$-b$	$-3/4b$	$-1/2b$	$-1/4b$	0	$1/4b$	$1/2b$	$3/4b$	$b$
0	0,004	-0,073	-0,169	-0,305	$\mp 0,500$	0,305	0,168	0,073	-0,004
$1/4b$	0,027	-0,017	-0,076	-0,162	-0,294	-0,486 0,513	0,317	0,172	-0,054
$1/2b$	0,033	0,010	-0,019	-0,067	-0,145	-0,271	-0,461 0,539	0,338	0,172
$3/4b$	0,029	0,023	0,013	-0,003	-0,039	-0,104	-0,216	-0,400 0,600	0,387
$b$	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$\vartheta = 0,668\ 74; \alpha = 0,625$									
$y \backslash e$	$-b$	$-3/4b$	$-1/2b$	$-1/4b$	0	$1/4b$	$1/2b$	$3/4b$	$b$
0	-0,023	-0,089	-0,176	-0,306	$\mp 0,500$	0,306	0,176	0,089	0,023
$1/4b$	0,005	-0,033	-0,085	-0,165	-0,290	-0,483 0,517	0,322	0,185	0,081
$1/2b$	0,018	-0,002	-0,028	-0,072	-0,144	-0,264	-0,453 0,547	0,348	0,192
$3/4b$	0,022	0,016	0,008	-0,008	-0,039	-0,099	-0,208	-0,394 0,606	0,389
$b$	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$\vartheta = 0,668\ 74; \alpha = 0,750$									
$y \backslash e$	$-b$	$-3/4b$	$-1/2b$	$-1/4b$	0	$1/4b$	$1/2b$	$3/4b$	$b$
0	-0,044	-0,102	-0,181	-0,305	$\mp 0,500$	0,305	0,181	0,102	0,044
$1/4b$	-0,013	-0,046	-0,092	-0,166	-0,287	-0,480 0,520	0,325	0,197	0,102
$1/2b$	0,005	-0,012	-0,035	-0,075	-0,143	-0,258	-0,448 0,552	0,354	0,207
$3/4b$	0,016	0,011	0,004	-0,010	-0,039	-0,095	-0,201	-0,389 0,611	0,391
$b$	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$\vartheta = 0,668\ 74; \alpha = 0,875$									
$y \backslash e$	$-b$	$-3/4b$	$-1/2b$	$-1/4b$	0	$1/4b$	$1/2b$	$3/4b$	$b$
0	-0,062	-0,113	-0,186	-0,304	$\mp 0,500$	0,304	0,186	0,113	0,062
$1/4b$	-0,028	-0,057	-0,098	-0,168	-0,284	-0,478 0,522	0,327 -0,443	0,207	0,121
$1/2b$	-0,006	-0,021	-0,042	-0,078	-0,142	-0,252	0,557	0,361	0,221
$3/4b$	0,010	0,006	-0,000	-0,013	-0,040	-0,093	-0,195	-0,384 0,616	0,393
$b$	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$\vartheta = 0,668\ 74; \alpha = 1,0$									
$y \backslash e$	$-b$	$-3/4b$	$-1/2b$	$-1/4b$	0	$1/4b$	$1/2b$	$3/4b$	$b$
0	-0,077	-0,122	-0,190	-0,303	$\mp 0,500$	0,303	0,190	0,122	0,077
$1/4b$	-0,041	-0,066	-0,104	-0,168	-0,281	-0,476 0,524	0,329 -0,438	0,214	0,135
$1/2b$	-0,015	-0,028	-0,047	-0,081	-0,141	-0,248	0,562	0,365	0,232
$3/4b$	0,005	0,002	-0,004	-0,016	-0,040	-0,090	-0,189	-0,380 0,620	0,394
$b$	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Je-li  $\alpha = 0$ , je posouvající síla dána stejným výrazem (29), jako v předchozím případě vzhledem k tomu, že kroučící momenty jsou nulové. Proto pro  $\alpha = 0$ , je  $\kappa_{0m} = \nu_{0m}$ .

Pro  $\alpha = 1$ , píšeme-li opět výraz pro posouvající sílu v obvyklém tvaru (vzorec 33 se záměnou indexů 1 za  $\alpha$  u součinitelů  $\kappa$  a  $\tau$ ), jsou hodnoty součinitelů  $\kappa_{11}$  a  $\tau_{11}$  dány výrazy

$$\kappa_{11} = \frac{1}{4 \operatorname{sh}^2 \sigma} \left\{ \begin{aligned} & \mp (\sigma \operatorname{ch} \sigma - 2 \operatorname{sh} \sigma) \operatorname{sh} \vartheta \chi \pm \vartheta \chi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma \chi + \\ & + [(\sigma \operatorname{ch} \sigma - 4 \operatorname{sh} \sigma) \operatorname{sh} \vartheta \varphi - \vartheta \varphi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \varphi] U_{\varphi} + \\ & + [(\sigma \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma) \operatorname{ch} \vartheta \varphi - \vartheta \varphi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \varphi] V_{\varphi} \end{aligned} \right\}; \quad (35)$$

$$\tau_{11} = \frac{l}{4b\pi m} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \sigma} \left\{ \begin{aligned} & \pm (\sigma \operatorname{ch} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \chi - \vartheta \chi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \chi) + \\ & + [(\sigma \operatorname{ch} \sigma - 2 \operatorname{sh} \sigma) \operatorname{sh} \vartheta \varphi - \vartheta \varphi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \varphi] U_{\varphi} + \\ & + [(\operatorname{sh} \sigma + \sigma \operatorname{ch} \sigma) \operatorname{ch} \vartheta \varphi - \vartheta \varphi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \varphi] V_{\varphi} \end{aligned} \right\}. \quad (36)$$

Symbole  $U_{\varphi}$ ,  $V_{\varphi}$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma$ ,  $\chi$  mají opět stejný význam jako dříve.  $\kappa_{1m}$  a  $\tau_{1m}$  se obdrží z těchto vzorců dosazením  $m\vartheta$  za  $\vartheta$ .

K určení posouvající síly  $Q_y$  pro obecné  $\alpha$  vypočtou se součinitelé  $\kappa_{\alpha m}$  a  $\tau_{\alpha m}$  pomocí  $\kappa_{0m} = \nu_{0m}$ ,  $\kappa_{1m}$  a  $\tau_{1m}$  podle interpolačních vzorců

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{\alpha m} &= \kappa_{0m} + (\kappa_{1m} - \kappa_{0m}) \sqrt{\alpha}, \\ \tau_{\alpha m} &= \tau_{1m} \sqrt{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$



Pro určení maximálních hodnot příčných posouvajících sil je v příčném směru rozhodující nejúčinnější poloha zatížení, stanovená podle příčinkových čar  $\nu$  (příp.  $\alpha$  a  $\tau$  u roštů) v podélném směru obvykle v místě zatížení.

### Přesné určení reakcí

Na okrajích  $x = 0; l, y = \pm b$  má reakce  $\bar{Q}_x$  a  $\bar{Q}_y$  vzhledem k náhradě kroutících momentů přidavnými silami [1, str. 166] jinou hodnotu než vychází z předchozích vztahů pro posouvající síly.

#### a) Reakce v podélném směru v desce

Reakce  $\bar{Q}_x$  v podélném směru na jednotku šířky v desce na okrajích  $x = 0; l$  je dána vztahem

$$\bar{Q}_x = -\varrho_T \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 4\gamma \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( M_x + \frac{4\gamma}{\varrho_P} M_y \right). \quad (38)$$

Obdobně k rovnici (11) vychází

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{am} = & \frac{m^3 \varrho_T \pi^3}{l^3 P_m} \left\{ (1 - 2\alpha^2) \left( A_m M_{\varphi m} + \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} N_{\varphi m} \right) + \right. \\ & + 2\alpha \sqrt{1 - \alpha^2} \left( A_m N_{\varphi m} - \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} N_{\varphi m} \right) + \\ & + (1 - 2\alpha^2) \left( C_m O_{\varphi m} + \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} P_{\varphi m} \right) + \\ & + 2\alpha \sqrt{1 - \alpha^2} \left( -C_m P_{\varphi m} + \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} O_{\varphi m} \right) + \\ & \left. + \bar{C}_m \left[ (1 + 2\alpha) O_{|\varphi-\psi|m} + \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} P_{|\varphi-\psi|m} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (39)$$

jestliže je reakce na okrajích  $x = 0; l$  dána vztahem

$$\bar{Q}_x = P_m \bar{\varepsilon}_{am} \cos \frac{m\pi x}{l}. \quad (40)$$

Podobně pro  $\alpha = 1$  přejde rov. (14) na tvar

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} = & \frac{l\vartheta}{4b \operatorname{sh}^2 \sigma} \left\{ (3 \operatorname{sh} \sigma - \sigma \operatorname{ch} \sigma) \operatorname{ch} \vartheta \chi + \vartheta \chi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \chi + \right. \\ & + [(5 \operatorname{sh} \sigma - \sigma \operatorname{ch} \sigma) \operatorname{ch} \vartheta \varphi + \vartheta \varphi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \varphi] U_{\psi} + \\ & \left. + [(2 \operatorname{sh} \sigma - \sigma \operatorname{ch} \sigma) \operatorname{sh} \vartheta \varphi + \vartheta \varphi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \varphi] V_{\psi} \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

$\varepsilon_{1m}$  se obdrží z rov. (41) dosazením  $m\vartheta$  za  $\vartheta$  a  $m\sigma$  za  $\sigma$ .

Součinitel  $\varepsilon_{0m}$  zůstává i na okrajích  $x = 0; l$  stejný.

### b) Reakce v podélnících v roštu

Obdobně k předchozímu případu je reakce v podélnících v roštu na jednotku šířky na okrajích  $x = 0$ ;  $l$  dána výrazem

$$\bar{Q}_x = P_m \cos \frac{m\pi x}{l} \left( \frac{l}{2b\pi m} K_{\alpha m} + \frac{2\gamma_P}{\rho_P} \frac{m\pi b}{l} \mu_{\alpha m} \right). \quad (42)$$

Pro  $\alpha = 1$  platí podobný vzorec, avšak u součinitelů s indexy  $l$  místo  $\alpha$ . Výrazy pro  $K_{\alpha m}$  a  $\mu_{\alpha m}$  jsou dány vztahy (5), resp. (19), nebo podle interpolačních vzorců (25) pomocí  $K_{0m}$ ,  $K_{1m}$  a  $\mu_{0m}$ ,  $\mu_{1m}$ .

### c) Reakce v příčném směru v desce

Na okrajích  $y = \pm b$  má reakce  $\bar{Q}_y$  hodnotu

$$\bar{Q}_y = -\rho_P \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - 4\gamma \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( M_y + \frac{4\gamma}{\rho_P} M_x \right). \quad (43)$$

Vyjádříme-li reakci znovu ve tvaru

$$\bar{Q}_y = \bar{v}_{\alpha m} P_m \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (44)$$

bude, použijeme-li stejného značení jako dříve,

$$\begin{aligned} \bar{v}_{\alpha m} = & \frac{m^3 \pi^3 \rho_P}{b^3 P_m} \left[ \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \left( A_m M_{\varphi m} + \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} N_{\varphi m} \right) + \right. \\ & + \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \left( A_m N_{\varphi m} - \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} M_{\varphi m} \right) - \\ & - \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \left( C_m O_{\varphi m} + \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} P_{\varphi m} \right) + \\ & + \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \left( C_m P_{\varphi m} - \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} O_{\varphi m} \right) \pm \\ & \left. \mp \sqrt{2(1+\alpha)} \bar{C}_m O_{|\varphi-\rho|m} \mp \alpha \bar{C}_m \frac{P_{|\varphi-\rho|m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \right] \end{aligned} \quad (45)$$

a

$$\bar{v}_{11} = \frac{1}{4 \operatorname{sh}^2 \sigma} \left\{ \mp (2 \operatorname{sh} \sigma + \sigma \operatorname{ch} \sigma) \operatorname{sh} \vartheta \chi \pm \vartheta \chi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \chi + \right. \\ \left. + [\sigma \operatorname{ch} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \varphi - \vartheta \varphi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \vartheta \varphi] U_{\varphi} + \right. \\ \left. + [(3 \operatorname{sh} \sigma + \sigma \operatorname{ch} \sigma) \operatorname{ch} \vartheta \varphi - \vartheta \varphi \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} \vartheta \varphi] V_{\varphi} \right\} \quad (46)$$

$\bar{v}_{1m}$  se obdrží z rov. (46) dosazením  $m\vartheta$  za  $\vartheta$  a  $m\sigma$  za  $\sigma$ . Výraz pro  $\bar{v}_{0m}$  zůstává stejný jako pro posouvající síly (29).

#### d) Reakce v příčnicích v roštu

Opět můžeme psát výraz pro reakci na okraji  $y = \pm b$  ve tvaru

$$\bar{Q}_y = P_m \sin \frac{m\pi x}{l} \left[ \kappa_{\alpha m} + \frac{m\pi b}{l} \frac{4\gamma_T}{\gamma_T + \gamma_P} \tau_{\alpha m} \right], \quad (47)$$

kde  $\kappa_{\alpha m}$  a  $\tau_{\alpha m}$  jsou dány vztahy (8), (34), resp. (29), (35) a (36) podle interpolačních vzorců (37).

Pro oba poslední případy c), d) jsou uvedené výrazy po reakci pouze kontrolou, neboť již okrajovými podmínkami je dáno, že pro jakoukoli polohu břemene musí být reakce na volném okraji nulové. Je tedy např. pro  $y = b$  a pro  $-b \leq e \leq \frac{3}{4}b$  součinitel  $\bar{v}_{\alpha}$  roven nule a pro  $e = b$  roven jedné.

#### Závěr

Odvozením vztahů pro určení posouvajících sil a reakcí je dána možnost použít metody Guyona—Massoneta pro úplný výpočet roštů mostního typu. Pro usnadnění vlastního výpočtu byly vypracovány numerické tabulky součinitelů  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \bar{\varepsilon}_1, \nu_0, \nu_1, \kappa_1$  v závislosti na parametru příčného ztužení  $\vartheta$ , excentricitě břemene  $e$  a pořadnici místa  $y$ , ve kterém je účinek hledán; tyto tabulky, spolu s tabulkami součinitelů  $K_0, K_1, \mu_0, \mu_1, \tau_1$  jsou obsaženy ve vyčerpávajícím rozsahu v připravované publikaci „Výpočet roštů a ortotropních desek“, která vyjde v tomto roce v SNTL.

#### LITERATURA

1. Girkmann K., Flächentragwerke. 5. vyd. Vídeň 1959. — 2. Guyon Y., Calcul des ponts-dalles. Ann. des Ponts et Chaussées de France 119, 555—589, 683—718, 1949. — 3. Hetényi M., Beams on elastic foundation. Univ. of Michigan Press, 1946. — 4. Massonnet Ch., Construction au calcul des ponts à poutres multiples. Ann. Travaux Publics de Belgique 104, č. 3, 5, 6, 377—433, 749—796, 927—964, 1950. — 5. Massonnet Ch., Méthode de calcul des ponts à poutres multiples tenant compte des leur résistance à la torsion. Mémoires AIPC 10, 147—182, 1950. — 6. Massonnet Ch., Compléments à la méthode de calcul des ponts à poutres multiples. Ann. des Travaux Publics de Belgique 5, 1954.

*Diskusní příspěvky k tomuto článku v rozsahu nejvíce 2 strany třeba poslat redakci časopisu do 30. dubna 1962, aby se mohly uveřejnit v říjnovém čísle.*

Рихард Бареш  
ВКЛАД В ТЕОРИЮ МЕТОДА РАСЧЕТА РОСТВЕРКОВ  
ПО ГУЬОН—МАССОННЕ

Один из более подходящих методов расчета ростверков мостового типа, применяющий аналогию ортотропической плиты, является метод разработанный Гуьоном и Массоннетом [2, 4, 5].

Для расчета прогибов, изгибающих моментов в продольном и поперечном направлениях и для расчета крутящих моментов Массонне [5, 6] отводил формулы для расчета коэффициентов распределения усилий. Автор предлагаемой статьи отводил отношения для приближительного и точного определения поперечных сил и реакций в обоих направлениях и то для ортотропической плиты и для ростверка. Подобно Массонне автор исходит из двух граничных случаев жесткости в кручении конструкции. В первом случае когда жесткость в кручении равна нулю, применена удобная аналогия, предполагая, что поперечную балку дифференциальной ширины возможно считать балкой на упругом основании, и для ее решения был применен метод расчета разработанный Гетены [3].

Во втором случае, когда конструкция является совершенно жесткой в кручении, применен метод, который для изотропической плиты отводил Гуьон [2].

По точным формулам, которые автор отводил в предлагаемой работе, были определены значения коэффициентов для расчета поперечных сил  $Q_x$  и  $Q_y$  (таб. 1, 2) для параметра поперечной связи  $\vartheta = 0,66874$  и для параметра кручения  $\alpha = 0,0; 0,0125; 0,25; 0,375; 0,50; 0,625; 0,750; 0,875; 1,00$  [определенных по формулам (6)]. Разбором этих величин были получены интерполяционные формулы (16) и (31), которые позволяют определить коэффициент для расчета поперечных сил для любой конструкции с помощью граничных значений коэффициентов для  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$  в зависимости от действительного параметра кручения  $\alpha$ , от положения точки нагрузки и сечения, для которого надо определить искомое действие.

*Замечания и отзывы к этой статье надо послать в трех копиях (не больше 2 страниц) редакции журнала до 30. апреля 1962 г., что бы можно было опубликовать их в октябрьском номере.*

Richard Bareš

A CONTRIBUTION TO THE METHOD OF ANALYSIS  
OF GIRDER GRIDS PROPOSED BY GUYON—MASSONNET

One of the most convenient methods of analysis of grids of the bridge type, using the analogy of orthotropic plate, is the method of Guyon and Massonnet [2, 4, 5]. Formulas for calculation of distribution coefficients needed for the calculation of deflections, bending moments acting in longitudinal and transverse directions as well as torsion moments have been derived by Massonnet. The Author of the article has derived formulas for approximative as well as exact determination of shearing forces and reactions in both directions both for orthotropic plate and girder grid. Like Massonnet the Author starts from two limit cases of torsional rigidity of the construction. In the first case, if the torsional rigidity of the construction is zero, a convenient analogy is used assuming that a transverse beam of differential width may be taken for a beam on an elastic foundation. The method of analysis used to this purpose has been derived by Héteényi [3]. In the second case if the construction is perfectly rigid from the point of view of torsion, the method of analysis derived by Guyon for isotropic plates [2] has been used.

Following exact formulas, derived in the paper, the values of coefficients needed for calculation of shearing forces  $Q_x$  and  $Q_y$  (see tab. 1, 2) for parameter of transverse stiffening  $\vartheta = 0,66874$  and the parameter of torsion  $\alpha = 0,00; 0,125; 0,25; 0,375; 0,50; 0,625; 0,750; 0,875; 1,00$  [defined by formulas (6)] have been computed. Analysing these values interpolation formulas (16) and (31) have been found allowing to determine coefficients for calculation of shearing forces of arbitrary construction by means of limit values of coefficients for  $\alpha = 0$  and  $\alpha = 1$  depending on actual parameter of torsion  $\alpha$ , point of load application and section in which the influence is to be determined.

*Discussion of this paper should be sent in triplicate (one copy not exceeding 2 pages) to the Editor by April 30<sup>th</sup> 1962, to be published in the October issue of this Journal.*

Ústav teoretické a aplikované mechaniky, Praha

Březen 1961